
Semantik von Programmiersprachen – SS 2015

<http://pp.ipd.kit.edu/lehre/SS2015/semantik>

Blatt 1: Mathematische Grundlagen

Besprechung: 20.04.2015

1. Äquivalenzrelationen und Ordnungen (H)

Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$, d.h., eine Menge von Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Statt $(a, b) \in R$ schreibt man oft $a R b$.

Sei im Folgenden $A = B$. R ist

reflexiv falls für alle $a \in A$ gilt: $a R a$

symmetrisch falls für alle $a, b \in A$ gilt: Wenn $a R b$, dann auch $b R a$.

antisymmetrisch falls für alle $a, b \in A$ gilt: Wenn $a R b$ und $b R a$, so gilt $a = b$.

transitiv falls für alle $a, b, c \in A$ gilt: Wenn $a R b$ und $b R c$, dann auch $a R c$.

total falls für alle $a, b \in A$ gilt: $a R b$ oder $a = b$ oder $b R a$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist eine **Äquivalenzrelation**. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt **(Halb-)Ordnung**.

Sei $A = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Welche Ordnungsrelationen? Welche total? Begründen Sie Ihre Antwort!

- $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

2. Induktive Definitionen (H)

Ein Beispiel: *Natürliche Zahlen*. Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} lässt sich als Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} wie folgt definieren:

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Wenn n eine natürliche Zahl ist, so ist auch $n + 1$ eine natürliche Zahl.
- Nichts anderes soll eine natürliche Zahl sein.

Solch eine Definition lässt sich kürzer mit Regeln schreiben:

$$0 \in \mathbb{N} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{n + 1 \in \mathbb{N}}$$

Bedingung (c) ist das Charakteristikum für induktive Definitionen und liefert ein Induktionsprinzip: Regelinduktion. Formal:

$$\frac{m \in \mathbb{N} \quad P(0) \quad \forall n. n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \longrightarrow P(n + 1)}{P(m)}$$

Dies ist genau die Regel für Induktion über natürliche Zahlen: Um eine Aussage für eine beliebige natürliche Zahl zu zeigen, genügt es, sie für 0 zu zeigen, und für $n + 1$ unter der Annahme, dass sie für n gilt.

Ein Beispielbeweis: Die Summe der ersten n Zahlen ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$.

Formal: $P(n) \equiv \left(\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right)$

- Induktionsanfang: Zu zeigen $P(0)$, d.h., $\sum_{i=0}^0 i = \frac{0(0+1)}{2}$ Beweis: Ausrechnen!
- Induktionsschritt: Zu zeigen: $\forall n. n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \longrightarrow P(n + 1)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Es gilt $P(n)$, d.h. $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Zu zeigen: $P(n + 1)$, d.h. $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=0}^n i \right) + (n + 1) = (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2} \quad \square \end{aligned}$$

Sei \rightarrow nun wieder eine Relation auf einer Menge A . Die reflexive, transitive Hülle \rightarrow^* von \rightarrow sei durch folgende Regeln definiert:

$$\text{REFL: } a \rightarrow^* a \qquad \text{STEP: } \frac{a \rightarrow^* b \quad b \rightarrow c}{a \rightarrow^* c}$$

- Bestimmen Sie für folgende Mengen die reflexive, transitive Hülle. Hierbei sei $A = \{a, b, c, d\}$.
 - $\rightarrow_1 = \{(a, b), (b, d), (c, d)\}$
 - $\rightarrow_2 = \{(a, b), (b, c), (d, a)\}$
 - $\rightarrow_3 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$
- Schreiben Sie die Induktionsregel für \rightarrow^* auf.
- Zeigen Sie, dass \rightarrow^* reflexiv ist.
- Zeigen Sie mittels Induktion, dass auch folgende Regel gilt:

$$\frac{x \rightarrow y \quad y \rightarrow^* z}{x \rightarrow^* z}$$

- Zeigen Sie, dass \rightarrow^* transitiv ist.
- Regelsysteme lassen sich direkt in Prolog-Prädikate übersetzen. Implementieren Sie entsprechend obiger Regeln ein Prolog-Prädikat `rtrancl(R,X,Y)`, das erfüllt ist, wenn $X R^* Y$ für das Prolog-Prädikat R gilt.

3. Falsche Induktionsbeweise (H)

Finden Sie die Fehler in folgenden Induktionsbeweisen!

- Alle Pferde einer endlichen Menge M von Pferden haben die gleiche Farbe.
Sei n die Anzahl der Pferde in M . Beweis durch Induktion über n .
Induktionsanfang: $n = 0$. Dann ist M leer und die Aussage trivial. Induktionsschritt: Angenommen, für alle Pferdemenge M' der Größe n gilt die Aussage. Sei M eine Pferdemenge der Größe $n + 1$, also $M = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$. Dann ist $M_1 = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$

eine Pferdemenge der Größe n , somit haben p_0, \dots, p_{n-1} alle die gleiche Farbe. Wähle nun $M_2 = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Dies ist wieder eine Pferdemenge der Größe n , somit haben auch p_1, \dots, p_n alle die gleiche Farbe. Damit hat p_0 also die gleiche Farbe wie p_1 und p_1 die gleiche Farbe wie p_2 bis p_n , somit haben alle Pferde aus M die gleiche Farbe.

- (b) Sei \rightarrow eine beliebige binäre Relation auf der Menge $\{\text{grün, gelb, rot}\}$. Dann gilt, dass in der transitiven Hülle von \rightarrow nur rot von rot aus erreichbar ist.

Formal: Für alle b gilt, wenn $\text{rot} \rightarrow^* b$, dann $\text{rot} = b$.

Beweis per (Regel-)Induktion über $\text{rot} \rightarrow^* b$:

- Fall REFL: Zu zeigen: $\text{rot} = \text{rot}$. Trivial.
- Fall STEP: Induktionsannahmen: $\text{rot} \rightarrow^* b$, $b \rightarrow c$ und $b = \text{rot}$.
Zu zeigen: $\text{rot} = c$. Folgt aus der Annahme.