Lehrstuhl für Programmierparadigmen

Sprachtechnologie und Compiler, Sommersemester 2014

Dozent: Prof. Dr.-Ing. G. Snelting
Übungsleiter: Sebastian Buchwald `Sebastian.Buchwald@kit.edu`

Übungsblatt 8 Ausgabe: 18.6.2014 Besprechung: 23.6.2014

Aufgabe 1: *Eigenschaften von Verbänden*

Hinweis: Sie können folgende Eigenschaft als gegeben betrachten:

$$\forall a, b, c \in M : a \leq b \quad \Rightarrow \quad (a \sqcup c) \leq (b \sqcup c) \;\wedge\; (a \sqcap c) \leq (b \sqcap c) \tag{1}$$

1.1 *Rechenregeln*

Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln:

a) $x \sqcup x = x$

b) $x \sqcup y = y \sqcup x$

c) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$

d) $x \sqcap x = x$

e) $x \sqcap y = y \sqcap x$

f) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

1.2 *Distributivität*

Verbände sind im Allgemeinen nicht distributiv. Zeigen Sie, welche der folgenden Aussagen immer gelten, oder finden Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel.

a) $x \sqcap (y \sqcup z) \leq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

b) $x \sqcap (y \sqcup z) \geq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

c) $x \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

d) $x \sqcup (y \sqcap z) \geq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Aufgabe 2: *Infimum und Supremum*

Gegeben sei eine Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ zusammen mit der Relation $\leq: M \times M$. Weiterhin gelte $a \leq e$, $a \leq f$, $b \leq f$, $c \leq e$, $c \leq g$, $d \leq i$, $e \leq h$, $f \leq h$, $f \leq i$, $g \leq i$, $g \leq j$.

2.1 *Halbordnung*

- Wenn $\leq$ eine Halbordnung auf M ist, welche anderen Beziehungen in $\leq$ müssen mindestens zusätzlich gelten? (Welche Paare müssen in Relation zueinander stehen)
- Fügen Sie nun noch $\{\top, \bot\}$ mit ihren bekannten Bedeutungen als größtes und kleinstes Element der Menge M hinzu. Zeichnen Sie anschließend das zugehörige Hasse-Diagram für die Halbordnung. Ist diese Halbordnung auch ein Verband? Begründen Sie ihre Antwort.

2.2 *Bestimmung von Supremum und Infimum*

Bestimmen Sie nun folgende Elemente, sofern sie existieren, oder erklären Sie, warum sie nicht existieren können.

a) $h \sqcap i$	b) $(a \sqcup b) \sqcup c$	c) $a \sqcup (c \sqcup d)$	d) $a \sqcup c$	e) $a \sqcup (b \sqcup c)$
f) $(a \sqcup c) \sqcup d$	g) $h \sqcap j$	h) $c \sqcup d$	i) $\bigsqcup\{a, c, d\}$	

Aufgabe 3: *Fixpunkte*

3.1 *Ungewöhnliche Fixpunkte*

a) Bestimmen Sie einen Verband $(L, \leq)$ und eine Funktion $f : L \to L$, die mehrere Fixpunkte, aber keinen kleinsten Fixpunkt, besitzt.

b) Bestimmen Sie einen Verband $(L, \leq)$ und eine monotone Funktion $f : L \to L$, die einen kleinsten Fixpunkt l besitzt, so dass aber $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\bot) \neq l$.

3.2 *Gleichungssysteme für Ungleichungen*

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Fixpunkte zur Berechnung der kleinsten Lösung von bestimmten Gleichungssystemen verwendet werden können. Das funktioniert auch für Ungleichungen.

Sei V ein Verband endlicher Höhe, x_i Variablen und $f_i : V^n \to V$ monotone Funktionen. So lässt sich ein System von Ungleichungen in ein System von äquivalenten Gleichungen umformen.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & f_1(x_1, .., x_n) \\ & ... & \\ x_n & \leq & f_n(x_1, .., x_n) \end{array} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \sqcap f_1(x_1, .., x_n) \\ & ... & \\ x_n & = & x_n \sqcap f_n(x_1, .., x_n) \end{array}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit dieser Äquivalenz.