

Semantik von Programmiersprachen – SS 2012

<http://pp.info.uni-karlsruhe.de/lehre/SS2012/semantik>

Lösungen zu Blatt 5: Compiler

Besprechung: 22.05.2012

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (H)

- (a) $[ASSN\ x\ 5,\ JMPF\ -1\ true,\ JMP\ 2,\ ASSN\ y\ (x + 7)]$ ist ein ASM-Programm.
- (b) $[JMP\ 0] \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{\infty}$
- (c) $comp(\text{if } (x \leq 0) \text{ then } x := 0 - x; y := 0 \text{ else skip}) = [JMPF\ 3\ (x \leq 0), ASSN\ x\ (0 - x), ASSN\ y\ 0]$
- (d) $[JMP\ 3,\ ASSN\ y\ 0,\ JMPF\ -3\ (y == 1), ASSN\ y\ 1]$ ist abgeschlossen.
- (e) Wenn $P ++ P' \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P| + |P'|, \sigma' \rangle$, dann gibt es ein σ^* mit $P \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P|, \sigma^* \rangle$ und $P' \vdash \langle 0, \sigma^* \rangle \xrightarrow{*} \langle |P'|, \sigma' \rangle$.
- (f) Zu jedem While-Programm gibt es ein semantisch äquivalentes ASM-Programm.

Lösung:

- (1a) Richtig.
- (1b) Richtig.
- (1c) Falsch. Auch für `if`-Abfragen mit leerem `else`-Zweig erzeugt der Compiler einen Sprung nach dem `then`-Zweig. Richtig ist: $[JMPF\ 4\ (x \leq 0), ASSN\ x\ (0 - x), ASSN\ y\ 0, JMP\ 1]$
- (1d) Falsch. $P_2 = JMPF\ -3\ (y == 1)$, aber $0 \not\leq 2 + (-3)$. Abgeschlossenheit ist eine rein statische Aussage, die auch für nicht erreichbare Sprünge und unerfüllbare Bedingungen gelten muss.
- (1e) Falsch, Beispiel: $P = [JMP\ 2], P' = [I]$. Dann $[JMP\ 2, I] \vdash \langle 0, \sigma \rangle \rightarrow \langle 2, \sigma \rangle$, aber $[JMP\ 2] \vdash \langle 0, \sigma \rangle \not\xrightarrow{*} \langle 1, \sigma^* \rangle$ für alle σ^* .

Wenn P und P' abgeschlossen wären, würde dies aus dem Aufteilungslemma 16 folgen: Es gäbe ein σ^* mit $P \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P|, \sigma^* \rangle$ und (i) $P ++ P' \vdash \langle |P|, \sigma^* \rangle \xrightarrow{*} \langle |P| + |P'|, \sigma' \rangle$. Nochmalige Anwendung des Lemmas auf (i) ergäbe ein σ^{**} mit $P' \vdash \langle 0, \sigma^* \rangle \xrightarrow{*} \langle |P'|, \sigma^{**} \rangle$ und (ii) $P ++ P' \vdash \langle |P| + |P'|, \sigma^{**} \rangle \xrightarrow{*} \langle |P| + |P'|, \sigma' \rangle$. Aus (ii) folgte durch Regelinversion, dass $\sigma^{**} = \sigma'$ wäre.

- (1f) Richtig. $comp(c)$ ist nach den Simulationstheoremen 12 und 17 semantisch äquivalent zu c . Die Umkehrung stimmt auch, ist aber nicht einfach zu beweisen: Jedes ASM-Programm definiert einen Control Flow Graph (CFG). Die Pfade durch den CFG sind aber eine reguläre Sprache, somit gibt es einen regulären Ausdruck dafür. Alle Operationen regulärer Ausdrücke sind durch `While`-Konstrukte ausdrückbar: $*$ = `while`-Schleife, $|$ = Fallunterscheidung, \cdot = Sequenz, ϵ = `skip`. Damit kann ein Programm konstruiert werden, dessen Ausführungssequenzen den Pfaden im CFG entsprechen. Die Bedingungen und Zuweisungen richtig einzubauen, ist dann nur noch Technik.

Der Standard-Beweis zur Äquivalenz der Klassen von `GOTO`- und `WHILE`-Programme kann hierfür nicht hergenommen werden, da er für die Transformation von `GOTO` nach `WHILE` eine zusätzliche Variable für den Programmzähler benötigt.

2. repeat c until b-Schleife (H)

Neben `while`-Schleifen sind auch `repeat`-Schleifen in vielen Programmiersprachen verbreitet. In dieser Aufgabe sei `Com` um die Produktion `repeat c until b` erweitert. Die Small-Step-Semantik für `repeat c until b` sei durch folgende Regel gegeben:

REPEAT : $\langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma \rangle \rightarrow_1 \langle c; \text{ if } (b) \text{ then skip else repeat } c \text{ until } b, \sigma \rangle$

- Geben Sie Regeln in der Big-Step-Semantik an, die `repeat c until b` das gleiche Verhalten geben wie REPEAT in der Small-Step-Semantik. Welche Schritte wären für einen Äquivalenzbeweis nötig?
- Erweitern Sie die Definition des Compilers `comp` auf Repeat-Schleifen.
- Erweitern Sie den Korrektheitsbeweis des Compilers (Thm. 12 und 17) um Repeat-Schleifen.

Lösung:

(2a) Big-Step-Regeln (analog zur `while`-Schleife):

$$\text{REPEATTT: } \frac{\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma' \quad \mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma' = \mathbf{tt}}{\langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'}$$

$$\text{REPEATFF: } \frac{\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma' \quad \mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma' = \mathbf{ff} \quad \langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma' \rangle \Downarrow \sigma''}{\langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma''}$$

Schritte für einen Äquivalenzbeweis (analog zu den Fällen für `while`-Schleifen):

- Schleifenabwicklungslemma für `repeat` (vgl. Lem. 1):
`repeat c until b` und `c; if (b) then skip else repeat c until b` sind in der Big-Step-Semantik äquivalent.
 Beweis durch Regelinversion (Transformation von Ableitungsbäumen).
- `repeat`-Fall im Induktionsbeweis der Simulation Big-Step \Rightarrow Small-Step (Thm. 8).
 Beweis analog zur `while`-Schleife (Übungsblatt 3)
- `repeat`-Fall im Induktionsbeweis der Simulation Small-Step \Rightarrow Big-step (Thm. 9):
 Beweis analog zur `while`-Schleife, braucht obiges Schleifenabwicklungslemma für `repeat`.

(2b) $\text{comp}(\text{repeat } c \text{ until } b) = \text{comp}(c) ++ [\text{JMPF } -|\text{comp}(c)| \ b]$

(2c) Weder Verschiebungslemma (Lem. 14) noch Aufteilungslemma (Lem. 16) müssen neu bewiesen werden, da diese unabhängig von `While` und dem Compiler sind. Für das Abgeschlossenheitslemma der generierten Instruktionsliste (Lem. 15) muss noch der neue Fall für `repeat` gezeigt werden.

Lemma 13: Aus $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$ folgt $P_1 ++ \text{comp}(c) ++ P_2 \vdash \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |\text{comp}(c)|, \sigma' \rangle$.

Beweis durch Regelinduktion über $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$, P_1 und P_2 beliebig:

- Fall REPEATTT:

Induktionsannahmen: Es gilt $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$, $\mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma' = \mathbf{tt}$ und für beliebige P_1 und P_2 gilt

$$P_1 ++ \text{comp}(c) ++ P_2 \vdash \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |\text{comp}(c)|, \sigma' \rangle.$$

Zu zeigen: Für alle P_1 und P_2 gilt

$$P_1 ++ \text{comp}(c) ++ [\text{JMPF } -|\text{comp}(c)| \ b] ++ P_2 \vdash \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |\text{comp}(c)| + 1, \sigma' \rangle.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus der Induktionsannahme (instanziiere dabei P_1 mit P_1 und P_2 mit $[JMPF -|comp(c)| b] ++ P_2$) gefolgt von der Regel JMPFF:

$$P_1 ++ comp(c) ++ [JMPF -|comp(c)| b] ++ P_2 \vdash \\ \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |comp(c)|, \sigma' \rangle \rightarrow \langle |P_1| + |comp(c)| + 1, \sigma' \rangle$$

- Fall REPEATFF: Abkürzung: $P = comp(c) ++ [JMPF -|comp(c)| b]$, $l = |comp(c)|$
Induktionsannahmen: Es gilt $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$, $\mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma' = \mathbf{ff}$, für beliebige P_1 und P_2 gilt

$$P_1 ++ comp(c) ++ P_2 \vdash \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |comp(c)|, \sigma' \rangle$$

weiter gilt $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma' \rangle \Downarrow \sigma''$ und für beliebige P_1 und P_2 gilt

$$P_1 ++ comp(c) ++ [JMPF -|comp(c)| b] ++ P_2 \vdash \\ \langle |P_1|, \sigma' \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |comp(c)| + 1, \sigma'' \rangle.$$

Zu zeigen ist: Für alle P_1 und P_2 gilt

$$P_1 ++ comp(c) ++ [JMPF -|comp(c)| b] ++ P_2 \vdash \\ \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |comp(c)| + 1, \sigma'' \rangle.$$

Beweis:

$$P_1 ++ comp(c) ++ [JMPF -|comp(c)| b] ++ P_2 \vdash \\ \langle |P_1|, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |P_1| + |comp(c)|, \sigma' \rangle \rightarrow \langle |P_1|, \sigma' \rangle \rightarrow \langle |P_1| + |comp(c)| + 1, \sigma'' \rangle$$

Thm. 17 Wenn $comp(c) \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle |comp(c)|, \sigma' \rangle$, dann $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

Beweis durch Induktion über c (σ und σ' beliebig):

- Fall $\mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b$: Abkürzungen: $P = comp(\mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b)$, $l = |comp(c)|$.

I.A. I: Für alle σ und σ' gilt, wenn $comp(c) \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle l, \sigma' \rangle$, dann $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

Zu zeigen: Wenn (i) $P \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle l + 1, \sigma' \rangle$, dann $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

Beweis einer stärkeren Aussage durch vollständige Induktion über n (σ beliebig):

Wenn $P \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{n} \langle l + 1, \sigma' \rangle$, dann $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

Sei n beliebig.

Induktionsannahme II: Für alle $m < n$ und σ gilt: Wenn $P \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{m} \langle l + 1, \sigma' \rangle$, dann $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

Zu zeigen: Wenn (i) $P \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{n} \langle l + 1, \sigma' \rangle$, dann $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

Aus (i) folgt mit dem Aufteilungslemma 16 (da $comp(c)$ abgeschlossen ist), dass

es σ^* , n_1 und n_2 gibt mit $n = n_1 + n_2$, (ii) $comp(c) \vdash \langle 0, \sigma \rangle \xrightarrow{n_1} \langle l, \sigma^* \rangle$ und

(iii) $P \vdash \langle l, \sigma^* \rangle \xrightarrow{n_2} \langle l + 1, \sigma' \rangle$.

Aus (ii) folgt mit der I.A. I, dass $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma^*$.

Fallunterscheidung nach $\mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma'$:

– Fall $\mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma = \mathbf{tt}$: Aus (iii) folgt dann $n_2 = 1$, $\sigma^* = \sigma'$ durch Regelinversion.

Nach Regel REPEATTT gilt $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$.

– Fall $\mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma = \mathbf{ff}$: Aus (iii) folgt damit $P \vdash \langle l, \sigma^* \rangle \rightarrow \langle 0, \sigma^* \rangle \xrightarrow{n_2-1} \langle l + 1, \sigma' \rangle$.

Mit der I.A. II ($m = n_2 - 1 < n$ und $\sigma = \sigma^*$) folgt $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma^* \rangle \Downarrow \sigma'$.

Zusammen mit $\mathcal{B} \llbracket b \rrbracket \sigma = \mathbf{ff}$ und $\langle c, \sigma \rangle \Downarrow \sigma^*$ folgt $\langle \mathbf{repeat} \ c \ \mathbf{until} \ b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$ nach Regel REPEATFF.

3. Compiler für arithmetische Ausdrücke (Ü)

Für die arithmetischen Ausdrücke $Aexp$ der Sprache `While` soll ein Compiler angegeben werden.

Der Compiler nimmt einen Ausdruck und übersetzt ihn in eine Liste von Instruktionen einer Stackmaschine. Auf der Stackmaschine stehen folgende Instruktionen zur Verfügung:

CONST n Lege die Konstante n auf den Stack.

LOAD x Lade den Wert der Variablen x auf den Stack.

APPLY f Wende die binäre Funktion f auf die beiden obersten Stackelemente an und ersetze sie durch das Ergebnis.

Die Maschine, auf der die übersetzten Ausdrücke abgearbeitet werden sollen, nimmt eine Liste von Instruktionen, einen (anfängs leeren) Stack und einen Zustand mit der aktuellen Variablenbelegung als Argumente. Auf die Variablenbelegung kann mit Hilfe von **LOAD** $_$ zugegriffen werden. Die Stackmaschine liefert einen neuen Stack als Ergebnis, der am Ende der Berechnung nur noch deren Ergebnis enthalten soll.

- (a) Geben Sie eine formale Semantik für die Stack-Maschine an.
- (b) Schreiben Sie einen Compiler für arithmetische Ausdrücke.
- (c) Formulieren Sie die Aussage, dass der Compiler korrekt ist, formal.
- (d) Beweisen Sie die Korrektheitsaussage.

Lösung:

(3a) Modellierung:

- Zustand wird nicht verändert, also vor \vdash setzen.
- Statt eines Instruktionszeigers wie bei ASM kann hier direkt die Liste der Instruktionen abgearbeitet werden, es gibt keine Sprünge.
- Variablenkonventionen: I für Instruktionsliste, s für Stack (Listendarstellung)

Abkürzung: $x \cdot xs = [x] ++ xs$

Semantik: $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \rightarrow \langle I', s' \rangle$

$$\text{CONST: } \sigma \vdash \langle \text{CONST } n \cdot I, s \rangle \rightarrow \langle I, n \cdot s \rangle$$

$$\text{LOAD: } \sigma \vdash \langle \text{LOAD } x \cdot I, s \rangle \rightarrow \langle I, \sigma(x) \cdot s \rangle$$

$$\text{APPLY: } \sigma \vdash \langle \text{APPLY } f \cdot I, n_2 \cdot n_1 \cdot s \rangle \rightarrow \langle I, f(n_1, n_2) \cdot s \rangle$$

Endzustand: $I = [], s = [n]$.

(3b) Definition des Compilers C rekursiv über Aexp:

$$C(n) = [\text{CONST } n]$$

$$C(x) = [\text{LOAD } x]$$

$$C(a_1 - a_2) = C(a_1) ++ C(a_2) ++ [\text{APPLY } -]$$

$$C(a_1 * a_2) = C(a_1) ++ C(a_2) ++ [\text{APPLY } *]$$

Wichtig ist, dass die Reihenfolge der Argumente für $-$ und $*$ mit der Semantikdefinition übereinstimmt, da $-$ nicht kommutativ ist. Für einen Stack $[n_1, n_2, \dots]$ bedeutet die Anwendung von **APPLY** $-$, dass n_1 und n_2 vom Stack genommen werden und $n_2 - n_1$ auf den Ergebnisstack gelegt werden.

(3c) Korrektheitsaussagen:

i. Für alle a und σ gilt: $\sigma \vdash \langle C(a), [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], [\mathcal{A} [a] \sigma] \rangle$.

ii. Für alle a, σ , und s' gilt: Wenn $\sigma \vdash \langle C(a), [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s' \rangle$, dann $s' = [\mathcal{A} [a] \sigma]$.

(3d) Die erste Behauptung benötigt folgendes Lifting-Lemma:

Lemma 1. Wenn $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \xrightarrow{n} \langle I', s' \rangle$, dann $\sigma \vdash \langle I ++ I^*, s ++ s^* \rangle \xrightarrow{n} \langle I' ++ I^*, s' ++ s^* \rangle$.

Beweis. Induktion über n (s und I beliebig):

- Fall $n = 0$: Zu zeigen: Wenn (i) $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \xrightarrow{0} \langle I', s' \rangle$, dann $\sigma \vdash \langle I ++ I^*, s ++ s^* \rangle \xrightarrow{0} \langle I' ++ I^*, s' ++ s^* \rangle$.
Aus (i) folgt $I' = I$ und $s' = s$ durch Regelinversion. Damit ist die Behauptung trivial.
- Fall $n = 1$: Zu zeigen: Wenn $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \rightarrow \langle I', s' \rangle$, dann $\sigma \vdash \langle I ++ I^*, s ++ s^* \rangle \rightarrow \langle I' ++ I^*, s' ++ s^* \rangle$.
Dies folgt per Fallunterscheidung nach CONST, LOAD bzw. APPLY.
- Fall $n + 1$: Induktionsannahme: Wenn $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \xrightarrow{n} \langle I', s' \rangle$, dann $\sigma \vdash \langle I ++ I^*, s ++ s^* \rangle \xrightarrow{n} \langle I' ++ I^*, s' ++ s^* \rangle$.
Zu zeigen: Wenn (i) $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \xrightarrow{n+1} \langle I', s' \rangle$, dann $\sigma \vdash \langle I ++ I^*, s ++ s^* \rangle \xrightarrow{n+1} \langle I' ++ I^*, s' ++ s^* \rangle$.
Aus (i) erhält man I'' und s'' mit $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \rightarrow \langle I'', s'' \rangle \xrightarrow{n} \langle I', s' \rangle$.
Aus $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \rightarrow \langle I'', s'' \rangle$ folgt $\sigma \vdash \langle I ++ I^*, s ++ s^* \rangle \rightarrow \langle I'' ++ I^*, s'' ++ s^* \rangle$ nach Fall $n = 1$. Mit der Induktionsannahme für I'' und s'' sowie $\sigma \vdash \langle I'', s'' \rangle \xrightarrow{n} \langle I', s' \rangle$ folgt die Behauptung. \square

Beweis der ersten Behauptung durch Induktion über a :

- Fall $a = n$: Zu zeigen: $\sigma \vdash \langle [\text{CONST } n], [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], [n] \rangle$. Trivial mit Regel CONST.
- Fall $a = x$: Zu zeigen: $\sigma \vdash \langle [\text{LOAD } x], [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], [\sigma(x)] \rangle$. Trivial mit Regel LOAD.
- Fall $a = a_1 - a_2$: Abkürzung: $I = C(a_1) ++ C(a_2) ++ [\text{APPLY } -]$
Induktionsannahmen: (i) $\sigma \vdash \langle C(a_1), [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], [\mathcal{A} [a_1] \sigma] \rangle$ und (ii) $\sigma \vdash \langle C(a_2), [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], [\mathcal{A} [a_2] \sigma] \rangle$.
Zu zeigen: $\sigma \vdash \langle I, [] \rangle \xrightarrow{*} \langle [], \mathcal{A} [a_1] \sigma - \mathcal{A} [a_2] \sigma \rangle$.
Aus (i) und (ii) folgt mit obigem Lemma und Regel APPLY:

$$\sigma \vdash \langle C(a_1) ++ (C(a_2) ++ [\text{APPLY } -]), [] \rangle \xrightarrow{*} \langle C(a_2) ++ [\text{APPLY } -], [\mathcal{A} [a_1] \sigma] \rangle \xrightarrow{*} \langle [\text{APPLY } -], [\mathcal{A} [a_2] \sigma] ++ [\mathcal{A} [a_1] \sigma] \rangle \rightarrow \langle [], \mathcal{A} [a_1] \sigma - \mathcal{A} [a_2] \sigma \rangle$$

- Fall $a = a_1 * a_2$: Analog zu $a_1 - a_2$. \square

Man kann die erste Behauptung auch ohne Liftinglemma beweisen, wenn man sie schon vor der Induktion verallgemeinert zu: Für alle a, σ, I und s gilt $\sigma \vdash \langle C(a) \cdot I, s \rangle \xrightarrow{*} \langle I, \mathcal{A} [a] \sigma \cdot s \rangle$.

Beweis der zweiten Behauptung. Dies könnte man analog zum Simulationstheorem 17 mit Induktion über a zeigen, das erfordert aber entsprechende Aufteilungslemmata. Einfacher ist der Beweis über Determinismus:

Wenn $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s' \rangle$ und $\sigma \vdash \langle I, s \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s'' \rangle$, dann $s' = s''$.

Beweis durch Induktion über I (s beliebig):

- Fall $I = []$: Aus $\sigma \vdash \langle [], s \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s' \rangle$ folgt $s = s'$, analog folgt aus $\sigma \vdash \langle [], s \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s'' \rangle$ dass $s = s''$, also gilt $s = s''$.
- Fall $i \cdot I$: (i ist eine Instruktion). Gegeben sind (i) $\sigma \vdash \langle i \cdot I, s \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s' \rangle$ und (ii) $\sigma \vdash \langle i \cdot I, s \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s'' \rangle$.
Da $i \cdot I \neq []$, erhält man aus (i) dass es I'^* und s'^* gibt mit $\sigma \vdash \langle i \cdot I, s \rangle \rightarrow \langle I'^*, s'^* \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s' \rangle$.
Analog erhält man aus (ii), dass es I''^* und s''^* gibt mit $\sigma \vdash \langle i \cdot I, s \rangle \rightarrow \langle I''^*, s''^* \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s'' \rangle$.
Durch Regelinversion folgt nun dass $I''^* = I'^* = I$ und $s'^* = s''^*$ (Ein-Schritt-Determinismus). Damit folgt die Behauptung mit der Induktionsannahme aus $\sigma \vdash \langle I, s'^* \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s' \rangle$ und $\sigma \vdash \langle I, s''^* \rangle \xrightarrow{*} \langle [], s'' \rangle$.

Die Behauptung folgt dann aus dem Determinismus zusammen mit der vorherigen Behauptung. \square

Anmerkung: Der Beweis über den Determinismus funktioniert nur, weil die erste Behauptung bereits beinhaltet, dass alle Ausführungen der Stack-Maschine terminieren. Für die Korrektheit von `comp` von `While` nach `ASM` hätte dies nicht funktioniert.