6.2 Fixpunkttheorie

Im vorherigen Abschnitt haben wir den Fixpunktoperator FIX als Grenzwert der Fixpunktiteration postuliert. Es ist aber noch nicht klar, dass die Fixpunktiteration immer zu einem Grenzwert konvergiert und was diese Konvergenz sein soll. Ebenso ist bisher nur behauptet, dass die Fixpunktiteration wirklich den „undefiniertesten“ Fixpunkt liefert. Außerdem ist die Definition über die Fixpunktiteration noch immer sehr mit operationellen Details durchsetzt, die in der denotationalen Semantik nicht erwünscht sind.

Die Fixpunkttheorie liefert die mathematischen Begriffe und Techniken, um diese Probleme formal zu lösen: Man ordnet alle semantischen Objekte nach ihrem Informationsgehalt.

Definition 33 (Approximationsordnung). Seien f und g partielle Funktionen des Typs $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$. f *approximiert* g ($f \sqsubseteq g$), falls für alle σ, σ' gilt:

$$\text{Wenn } f(\sigma) = \sigma', \text{ dann } g(\sigma) = \sigma'.$$

g muss also mindestens für all die Zustände definiert sein, für die f definiert ist, und in diesem Fall den gleichen Ergebniszustand haben. Ist f dagegen für einen Zustand σ nicht definiert, ist $g(\sigma)$ beliebig.

Lemma 24. $\sqsubseteq$ ist eine Halbordung auf $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$.

Beweis. Man muss Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität zeigen. Alle drei sind trivial. $\square$

Beispiel 28. Seien

$$f_1(\sigma) = \sigma \qquad f_2(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma(\mathtt{x}) > 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_3(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma(\mathtt{x}) < 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_4(\sigma) = \bot$$

Dann gilt $f_4 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq f_1$ und $f_4 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_1$, aber weder $f_2 \sqsubseteq f_3$, noch $f_3 \sqsubseteq f_2$. $\sqsubseteq$ ist also keine totale Ordnung.

Definition 34 (Kleinstes Element). Ein *kleinstes Element* einer geordneten Menge $(D, \sqsubseteq)$ ist ein Element $d \in D$, so dass für alle Elemente $d' \in D$ gilt: $d \sqsubseteq d'$. Bezogen auf unsere Informationsordnung $\sqsubseteq$ ist das kleinste Element das, das *keine Information* enthält; wir bezeichnen es mit $\bot$.

Kleinste Elemente sind, wenn sie existieren, eindeutig (wegen der Antisymmetrie).

Lemma 25. Die überall undefinierte Funktion $(\lambda\sigma.\ \bot)$ ist das kleinste Element von $(\Sigma \rightharpoonup \Sigma, \sqsubseteq)$.

Beweis. Sei f eine partielle Funktion $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$. Zu zeigen: Wenn $(\lambda\sigma.\ \bot)(\sigma) = \sigma'$, dann $f(\sigma) = \sigma'$. $(\lambda\sigma.\ \bot)(\sigma)$ ist aber immer undefiniert, somit nie gleich σ'. Damit ist die Annahme nicht erfüllt und der Beweis trivial. $\square$

Definition 35 (Obere Schranke). Ein Element $d \in D$ einer geordneten Menge $(D, \sqsubseteq)$ heißt *obere Schranke* einer Menge $Y \subseteq D$, falls für alle $d' \in Y$ gilt: $d' \sqsubseteq d$. d heißt *kleinste obere Schranke* von Y, falls d eine obere Schranke ist und für alle (anderen) oberen Schranken d' von Y gilt: $d \sqsubseteq d'$. Die kleinste obere Schranke von Y ist eindeutig, wenn sie existiert, und wird mit $\bigsqcup Y$ bezeichnet.

Beispiel 29. Seien

$$f_1(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma(\mathtt{x}) = 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_2(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma(\mathtt{y}) = 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_3(\sigma) = \sigma$$

Dann gilt: $f_1 \sqsubseteq f_3$ und $f_2 \sqsubseteq f_3$, also ist f_3 obere Schranke von $Y = \{ f_1,\ f_2 \}$. Sei

$$f_4(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma(\mathtt{x}) = 0 \text{ oder } \sigma(\mathtt{y}) = 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $f_1 \sqsubseteq f_4$ und $f_2 \sqsubseteq f_4$ ist f_4 auch eine obere Schranke von Y. f_4 ist übrigens die kleinste obere Schranke:

Beweis. Sei g eine beliebige obere Schranke von Y. Dann gilt $f_1 \sqsubseteq g$ und $f_2 \sqsubseteq g$. Zu zeigen: $f_4 \sqsubseteq g$. Seien also σ, σ' beliebig mit $f_4(\sigma) = \sigma'$. Zu zeigen: $g(\sigma) = \sigma'$. Fallunterscheidung nach $\sigma(\mathtt{x}) = 0$.

- Fall $\sigma(\mathtt{x}) = 0$: Dann $f_1(\sigma) = \sigma$ und $f_4(\sigma) = \sigma$, also $\sigma' = \sigma$. Wegen $f_1 \sqsubseteq g$ gilt auch $g(\sigma) = \sigma$.
- Fall $\sigma(\mathtt{x}) \neq 0$: Fallunterscheidung nach $\sigma(\mathtt{y}) = 0$:
  - Fall $\sigma(\mathtt{y}) = 0$: Dann $f_2(\sigma) = \sigma$ und $f_4(\sigma) = \sigma$, also $\sigma' = \sigma$. Wegen $f_2 \sqsubseteq g$ gilt auch $g(\sigma) = \sigma$.
  - Fall $\sigma(\mathtt{y}) \neq 0$: Dann $f_4(\sigma) = \bot$, im Widerspruch zu $f_4(\sigma) = \sigma'$. □

Beispiel 30. Sei A eine beliebige Menge und $\mathfrak{P}(A)$ die Potenzmenge von A. $(\mathfrak{P}(A), \subseteq)$ ist eine Halbordnung, in der jede Menge $\mathfrak{B}$ von Teilmengen von A eine kleinste obere Schranken besitzt: Für $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ ist $\bigcup \mathfrak{B} = \{ a \in B \mid B \in \mathfrak{B} \}$ die kleinste obere Schranke.

Definition 36 (Kette). Eine Menge $Y \subseteq D$ heißt *Kette*, falls alle Elemente miteinander vergleichbar sind. Formal: Für alle $d, d' \in Y$ gilt: $d \sqsubseteq d'$ oder $d' \sqsubseteq d$.

Beispiel 31. Seien f_1, f_2, f_3 und f_4 wie im Beispiel 29. Dann ist $Y = \{ f_2,\ f_3,\ f_4 \}$ eine Kette mit $\bigsqcup Y = f_3$, weil $f_2 \sqsubseteq f_4 \sqsubseteq f_3$. $Z = \{ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4 \}$ ist keine Kette, weil weder $f_1 \sqsubseteq f_2$ noch $f_2 \sqsubseteq f_1$.

Definition 37 (Kettenvollständige Halbordnung, ccpo). D heißt *kettenvollständige Halbordnung* (*chain-complete partial order*, *ccpo*), falls jede Kette in D eine kleinste obere Schranke in D besitzt.

Beispiel 32. Sei $<$ die normale Ordnung auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und Y die Menge aller geraden Zahlen. Dann ist Y eine Kette in $\mathbb{Q}$, da $0 < 2 < 4 < 6 < ...$, aber $\bigsqcup Y$ existiert nicht. Auch $Z = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2} \}$ ist eine Kette in $\mathbb{Q}$, die keine kleinste obere Schranke in den rationalen Zahlen hat.

Lemma 26. $(\Sigma \rightharpoonup \Sigma,\ \sqsubseteq)$ ist eine kettenvollständige Halbordnung.

Beweis. Lem. 24 zeigt, dass $(\Sigma \rightharpoonup \Sigma,\ \sqsubseteq)$ eine Halbordnung ist. Sei also Y eine Kette mit Elementen aus $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$. Zu zeigen: Y hat eine kleinste obere Schranke. Definiere

$$\left(\bigsqcup Y\right)(\sigma) = \begin{cases} \sigma' & \text{falls es ein } f \in Y \text{ gibt mit } f(\sigma) = \sigma' \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\bigsqcup Y$ ist eine partielle Funktion $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$:
  Seien f_1, f_2 aus Y mit $f_1(\sigma) = \sigma_1$ und $f_2(\sigma) = \sigma_2$. Da Y eine Kette ist, gilt $f_1 \sqsubseteq f_2$ oder $f_2 \sqsubseteq f_1$. Somit $\sigma_1 = \sigma_2$.
- $\bigsqcup Y$ ist eine obere Schranke von Y:
  Sei $f \in Y$. Zu zeigen: $f \sqsubseteq \bigsqcup Y$.
  Seien also σ, σ' beliebig mit $f(\sigma) = \sigma'$. Nach Definition von $\bigsqcup Y$ ist wie gefordert $(\bigsqcup Y)(\sigma) = \sigma'$.
- $\bigsqcup Y$ ist die kleinste obere Schranke von Y:
  Sei g obere Schranke von Y. Zu zeigen: $\bigsqcup Y \sqsubseteq g$.
  Seien σ, σ' beliebig mit $(\bigsqcup Y)(\sigma) = \sigma'$. Nach Definition von $\bigsqcup Y$ gibt es ein $f \in Y$ mit $f(\sigma) = \sigma'$.
  Da g obere Schranke von Y ist, gilt $f \sqsubseteq g$, also $g(\sigma) = \sigma'$. □

Definition 38 (Monotonie). Eine Funktion f zwischen zwei geordneten Mengen $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ heißt *monoton*, wenn für alle $d, d' \in D$ mit $d \sqsubseteq_D d'$ gilt: $f(d) \sqsubseteq_E f(d')$.

Monotone Funktionen respektieren also den Informationsgehalt: Je mehr Information man hineingibt, desto mehr Information bekommt man heraus. Im Rahmen unserer Semantik besteht die geordnete Menge D selbst aus Funktionen; wir interessieren uns hier also für monotone Funktionale.

Beispiel 33. Das Funktional $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)$ ist monoton in g.
Seien $g_1 \sqsubseteq g_2$ beliebig. Zu zeigen: $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g_1) \sqsubseteq \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g_2)$.
Seien also σ und σ' beliebig mit $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g_1)\,(\sigma) = \sigma'$. Zu zeigen: $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g_2)\,\sigma = \sigma'$.
Fallunterscheidung nach $p(\sigma)$:

- Fall $p(\sigma) = \mathbf{tt}$: Dann gilt $f(\sigma) = \sigma'$ und somit auch $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g_2)\,\sigma = \sigma'$.
- Fall $p(\sigma) = \mathbf{ff}$: Dann gilt $g_1(\sigma) = \sigma'$. Wegen $g_1 \sqsubseteq g_2$ gilt auch $g_2(\sigma) = \sigma'$, also $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g_2)\,\sigma = \sigma'$.

Analog erhält man, dass das Funktional $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)$ auch in f monoton ist.

Lemma 27. Die Komposition monotoner Funktionen ist monoton. Wenn f und g monoton sind, dann ist auch $f \circ g$ monoton.

Beweis. Trivial durch die Transitivität der Halbordnung. □

Lemma 28 (Kettenerhalt unter monotonen Funktionen). Sei $f :: D \Rightarrow E$ eine monotone Funktion bezüglich der ccpos $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$. Wenn Y eine Kette in $(D, \sqsubseteq_D)$ ist, dann ist $\{\, f(d) \mid d \in Y \,\}$ eine Kette in E. Außerdem gilt:

$$\bigsqcup \{\, f(d) \mid d \in Y \,\} \sqsubseteq_E f\left(\bigsqcup Y\right)$$

Beweis. Sei $Z = \{\, f(d) \mid d \in Y \,\}$.

- Z ist eine Kette:
  Seien $e, e' \in Z$ beliebig. Zu zeigen: $e \sqsubseteq_E e'$ oder $e' \sqsubseteq_E e$.
  Wegen $e, e' \in Z$ gibt es d, d' aus Y mit $e = f(d)$ und $e' = f(d')$. Da Y eine Kette ist, gilt $d \sqsubseteq_D d'$ oder $d' \sqsubseteq_D d$. Da f monoton ist, folgt $f(d) \sqsubseteq_E f(d')$ oder $f(d') \sqsubseteq_E f(d)$.
- $\bigsqcup Z \sqsubseteq_E f\,(\bigsqcup Y)$:
  Es genügt zu zeigen, dass $f\,(\bigsqcup Y)$ eine obere Schranke von Z ist, da $\bigsqcup Z$ die kleinste obere Schranke ist. Sei also $e \in Z$ beliebig. Dann gibt es ein $d \in Y$ mit $f(d) = e$. Da Y eine Kette ist und $(D, \sqsubseteq_D)$ eine ccpo, ist $d \sqsubseteq_D \bigsqcup Y$. Da f monoton ist, folgt $f(d) \sqsubseteq_E f\,(\bigsqcup Y)$. Also ist $f(\bigsqcup Y)$ eine obere Schranke von Z.

□

Beispiel 34. Sei $(\mathbb{N}^\infty, <)$ die geordnete Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit Unendlich, und sei $(\mathbb{B}, <)$ die geordnete Menge der Wahrheitswerte ($\mathbf{ff} < \mathbf{tt}$). Sei $f :: \mathbb{N}^\infty \Rightarrow \mathbb{B}$ definiert durch $f(n) = (n = \infty)$. $(\mathbb{N}^\infty, <)$ und $(\mathbb{B}, <)$ sind ccpos und f ist monoton.

f erhält aber im Allgemeinen keine kleinsten oberen Schranken:

$$f\left(\bigsqcup \mathbb{N}\right) = f(\infty) = \mathbf{tt} \not\sqsubseteq \mathbf{ff} = \bigsqcup \{\, \mathbf{ff} \,\} = \bigsqcup \{\, f(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

Definition 39 (kettenstetig, strikt). Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ ccpos und $f :: D \Rightarrow E$ eine monotone Funktion. f heißt *kettenstetig*, falls es kleinste obere Schranken von Ketten erhält. Formal: Für alle nicht-leeren Ketten Y in $(D, \sqsubseteq_D)$ muss gelten:

$$\bigsqcup \{\, f(d) \mid d \in Y \,\} = f\left(\bigsqcup Y\right)$$

Falls diese Gleichheit auch für leere Ketten gilt (d.h. $f(\bot) = \bot$), heißt f *strikt*.

Lemma 29. Die Komposition kettenstetiger Funktionen ist kettenstetig.

Beweis. Zu zeigen: Wenn f und g kettenstetig sind, dann ist es auch $f \circ g$.
Sei also Y eine Kette. Dann ist auch $Z = \{\, g(d) \mid d \in Y \,\}$ eine Kette nach Lem. 28. Damit gilt:

$$\bigsqcup \{\, (f \circ g)(d) \mid d \in Y \,\} = \bigsqcup \{\, f(e) \mid e \in Z \,\} = f\left(\bigsqcup Z\right) = f\left(g\left(\bigsqcup Y\right)\right) = (f \circ g)\left(\bigsqcup Y\right) \qquad \square$$

Theorem 30 (Knaster-Tarski-Fixpunktsatz). Sei $f :: D \Rightarrow D$ eine monotone, kettenstetige Funktion auf einer ccpo $(D, \sqsubseteq)$ mit kleinstem Element $\bot$. Dann definiert

$$\mathrm{FIX}\,(f) = \bigsqcup \{\, f^n(\bot) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

ein Element von D, das der kleinste Fixpunkt von f ist.

Dieses Theorem gibt dem Grenzwert der Fixpunktiteration eine formale Grundlage: Er ist die kleinste obere Schranke der Fixpunktiterationsfolge.

Beweis. Für die Wohldefiniertheit ist zu zeigen, dass $\{\, f^n(\bot) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ eine Kette in D ist. Wegen der Transitivität von $\sqsubseteq$ genügt es, zu zeigen, dass $f^n(\bot) \leq f^{n+1}(\bot)$ für alle n gilt. Beweis per Induktion über n:

- Fall $n = 0$: Da $\bot$ das kleinste Element von D ist, gilt: $f^0(\bot) = \bot \sqsubseteq f^1(\bot)$.
- Induktionsschritt: Zu zeigen: $f^{n+1}(\bot) \sqsubseteq f^{n+2}(\bot)$. Induktionsannahme: $f^n(\bot) \sqsubseteq f^{n+1}(\bot)$. Da f monoton ist, folgt aus der Induktionsannahme, dass $f(f^n(\bot)) \sqsubseteq f(f^{n+1}(\bot))$, was zu zeigen ist.

Die Fixpunkteigenschaft folgt aus folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{FIX}\,(f)) &= f\left(\bigsqcup \{\, f^n(\bot) \mid n \in \mathbb{N} \,\}\right) = \bigsqcup \{\, f(f^n(\bot)) \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \bigsqcup \{\, f^n(\bot) \mid n \geq 1 \,\} \\ &= \bigsqcup (\{\, f^n(\bot) \mid n \geq 1 \,\} \cup \{\, \bot \,\}) = \bigsqcup \{\, f^n(\bot) \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \mathrm{FIX}\,(f) \end{aligned}$$

Jetzt fehlt noch der Beweis, dass $\mathrm{FIX}\,(f)$ der kleinste Fixpunkt von f ist.
Sei d ein Fixpunkt von f. Induktion über n ergibt $f^n(\bot) \sqsubseteq d$:

- Fall $n = 0$: Es gilt $f^0(\bot) = \bot \sqsubseteq d$, da $\bot$ das kleinste Element ist.
- Induktionsschritt: Zu zeigen: $f^{n+1}(\bot) \sqsubseteq d$. Induktionsannahme: $f^n(\bot) \sqsubseteq d$.
  Da f monoton ist, folgt aus der Induktionsannahme, dass $f(f^n(\bot)) \sqsubseteq f(d)$. Da d Fixpunkt ist, gilt $f(d) = d$.

Damit ist d eine obere Schranke der Kette $\{\, f^n(\bot) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Da $\mathrm{FIX}\,(f)$ die kleinste obere Schranke der Kette ist, gilt $\mathrm{FIX}\,(f) \sqsubseteq d$. $\square$

6.3 Existenz des Fixpunkts für `while`

Mit Thm. 30 haben wir ein hinreichendes Kriterium dafür gefunden, dass Funktionen einen kleinsten Fixpunkt haben. Damit können wir das noch offene Problem der denotationalen Semantik für While, dass FIX für manche Funktionale nicht existieren könnte, lösen. Dazu müssen wir zeigen, dass nur monotone, kettenstetige Funktionale in der Definition von $\mathcal{D}\,[\![\_]\!]$ auftreten können.

Theorem 31. Seien $g, h :: \Sigma \rightharpoonup \Sigma$ beliebig. Das Funktional $F(f) = \mathrm{IF}\,(p,\ f \circ g,\ h)$ ist monoton und kettenstetig auf der ccpo $(\Sigma \rightharpoonup \Sigma, \sqsubseteq)$.

Beweis. Das Funktional F lässt sich in eine Hintereinanderausführung von Funktionalen umschreiben:

$$F = (\lambda f.\ \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ h)) \circ (\lambda f.\ f \circ g)$$

Anmerkung: Die beiden Vorkommen $\circ$ bezeichnen verschiedene Funktionskompositionen! Das äußere ist die normale Hintereinanderausführung auf totalen Funktionalen, das innere die Komposition partieller Funktionen, die Undefiniertheit propagiert.

Nach Lem. 27 und 29 genügt es, zu zeigen, dass die beiden Teile monoton und kettenstetig sind.

- $\lambda f.\ f \circ g$ ist monoton: Sei $f_1 \sqsubseteq f_2$. Zu zeigen $f_1 \circ g \sqsubseteq f_2 \circ g$.

  Sei also $(f_1 \circ g)(\sigma) = \sigma'$. Zu zeigen: $(f_2 \circ g)(\sigma) = \sigma'$.

  Nach Definition gibt es ein σ'' mit $g(\sigma) = \sigma''$ und $f_1(\sigma'') = \sigma'$. Wegen $f_1 \sqsubseteq f_2$ gilt $f_2(\sigma'') = \sigma'$. Mit $g(\sigma) = \sigma''$ folgt $(f_2 \circ g)(\sigma) = \sigma'$ nach Definition.

- $\lambda f.\ f \circ g$ ist kettenstetig:
  Sei Y beliebige, nicht-leere Kette. Es genügt, folgende Ungleichung zu zeigen – die andere Richtung folgt schon aus Lem. 28.

  $$\left(\bigsqcup Y\right) \circ g \sqsubseteq \bigsqcup \{\, f \circ g \mid f \in Y \}$$

  Sei also $(\bigsqcup Y \circ g)(\sigma) = \sigma'$. Dann gibt es ein σ^* mit $g(\sigma) = \sigma^*$ und $(\bigsqcup Y)(\sigma^*) = \sigma'$. Nach Definition von $\bigsqcup Y$ gibt es ein $f \in Y$ mit $f(\sigma^*) = \sigma'$. Mit $g(\sigma) = \sigma^*$ gilt $(f \circ g)(\sigma) = \sigma'$. Wegen $f \circ g \in \{\, f \circ g \mid f \in Y\}$ ist $f \circ g \sqsubseteq \bigsqcup \{\, f \circ g \mid f \in Y\}$. Mit $(f \circ g)(\sigma) = \sigma'$ ist damit $(\bigsqcup \{\, f \circ g \mid f \in Y\})(\sigma) = \sigma'$ nach Definition.

- $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)$ ist monoton in f: Siehe Beispiel 33.

- $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)$ ist kettenstetig in f:
  Sei Y eine beliebige, nicht-leere Kette in $(\Sigma \rightharpoonup \Sigma, \sqsubseteq)$. Zu zeigen:

  $$\mathrm{IF}\left(p,\ \bigsqcup Y,\ g\right) \sqsubseteq \bigsqcup \{\, \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \mid f \in Y \,\}$$

  Sei also σ, σ' beliebig mit $\mathrm{IF}\,(p,\ \bigsqcup Y,\ g)\,(\sigma) = \sigma'$. Zu zeigen: $(\bigsqcup \{\, \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \mid f \in Y \,\})\,(\sigma) = \sigma'$.
  - Fall $p(\sigma) = \mathtt{tt}$: Damit $\mathrm{IF}\,(p,\ \bigsqcup Y,\ g)\,(\sigma) = \bigsqcup Y(\sigma) = \sigma'$. Nach Definition von $\bigsqcup Y$ gibt es also ein $f \in Y$ mit $f(\sigma) = \sigma'$. Somit gilt auch $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)\,(\sigma) = f(\sigma)$, da $p(\sigma) = \mathtt{tt}$. Da $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \in \{\, \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \mid f \in Y \,\}$, ist $f = \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \sqsubseteq \bigsqcup \{\, \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \mid f \in Y \,\}$. Mit $f(\sigma) = \sigma'$ folgt die Behauptung.
  - Fall $p(\sigma) = \mathbf{ff}$: Damit $\mathrm{IF}\,(p,\ \bigsqcup Y,\ g)\,(\sigma) = g(\sigma) = \sigma'$. Da Y nicht leer ist, gibt es ein $f \in Y$. Dann ist $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)\,(\sigma) = g(\sigma) = \sigma'$ nach Definition. Da $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \in \{\, \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \mid f \in Y \,\}$, ist $g = \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \sqsubseteq \bigsqcup \{\, \mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g) \mid f \in Y \,\}$. Mit $g(\sigma) = \sigma'$ folgt die Behauptung. □

Damit ist $\mathcal{D}\,[\![\_]\!]$ durch Def. 32 wohldefiniert: In der kritischen Definitiongleichung für `while (`b`) do` c

$$\mathcal{D}\,[\![\mathtt{while}\ (b)\ \mathtt{do}\ c]\!] = \mathrm{FIX}\,(\lambda f.\ \mathrm{IF}\,(\mathcal{B}\,[\![b]\!],\ f \circ \mathcal{D}\,[\![c]\!],\ id))$$

existiert der Fixpunkt immer nach Thm. 30, denn das Funktional $F(f) = \mathrm{IF}\,(\mathcal{B}\,[\![b]\!],\ f \circ \mathcal{D}\,[\![c]\!],\ id)$ ist nach Thm. 31 monoton und kettenstetig.