

Semantik von Programmiersprachen – SS 2010

<http://pp.info.uni-karlsruhe.de/lehre/SS2010/semantik>

Blatt 9: Denotationale Semantik mit Fixpunktiteration

Besprechung: 15.06.2010

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (H)

(a) Die folgende Rekursionsgleichung definiert die Funktion $f :: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ eindeutig:

$$f(n) = \begin{cases} 2 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ f(n+1) - 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(b) Die folgende Rekursionsgleichung definiert die Funktion $g :: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ eindeutig:

$$g(n) = \begin{cases} \left(g\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ g(n-1) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(c) Das Funktional $F :: (\Sigma \rightarrow \Sigma) \Rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$ mit

$$F(f) = \lambda\sigma. \begin{cases} (f(\sigma[x \mapsto 42]))[y \mapsto 23] & \text{falls } \sigma(z) \leq 17 \\ \sigma[z \mapsto 0] & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört zur Rekursionsgleichung

$$Q(\sigma) = \begin{cases} (Q(\sigma[x \mapsto 42]))[y \mapsto 23] & \text{falls } \sigma(z) \leq 17 \\ \sigma[z \mapsto 0] & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Für das Funktional $F :: (\Sigma \rightarrow \Sigma) \Rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$ mit

$$F(f) = \lambda\sigma. \begin{cases} f(\sigma[y \mapsto 12]) & \text{falls } \sigma(x) = 13 \\ \sigma[x \mapsto 10] & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$F^{42}(\perp)(\sigma) = \begin{cases} \perp & \text{falls } \sigma(x) = 13 \\ \sigma[x \mapsto 10] & \text{sonst} \end{cases}$$

(e) $\mathcal{D}[[c_1; (c_2; c_3)]] = \mathcal{D}[[c_2; c_1]; c_3]$

(f) $\mathcal{D}[[\text{if } (x \leq y) \text{ then } z := x \text{ else } z := y]; \text{skip}]] \sigma = \sigma[z \mapsto \min(\sigma(x), \sigma(y))]$

2. Fixpunktiteration (H)

Gegeben sei folgendes Programm P :

```
x := 0; i := n; while (1 <= i) do (x := x + 2 * i; i := i - 1)
```

- Geben Sie das Funktional F an, das in der denotationellen Semantik zur Schleife gehört.
- Berechnen Sie $F^0(\perp)$, $F^1(\perp)$, $F^2(\perp)$ und $F^3(\perp)$.
- Geben Sie $F^n(\perp)$ und $\text{FIX}(F)$ an (ohne Beweis).
- Geben Sie $\mathcal{D} \llbracket P \rrbracket$ an.

3. Lokale Variablen in Blöcken (Ü)

In Kap. 5.3 haben wir die While-Sprache um Blöcke mit lokalen Variablen erweitert und operationale Semantiken dafür angegeben. Erweitern Sie in diesem Abschnitt die denotationale Semantik entsprechend.

- Definieren Sie $\mathcal{D} \llbracket _ \rrbracket$ für das neue Sprachkonstrukt $\{ \text{var } x = a; c \}$. Bleibt dadurch $\mathcal{D} \llbracket _ \rrbracket$ kompositional?
- Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\mathcal{D} \llbracket \{ \text{var } z = x; x := y; y := z \} \rrbracket = \mathcal{D} \llbracket x := x + y; y := x - y; x := x - y \rrbracket$$