

Rechnerübung zu Theorembeweiser und ihre Anwendungen

Prof. Dr.-Ing. Gregor Snelting
Dipl.-Inf. Univ. Daniel Wasserrab

Lehrstuhl Programmierparadigmen
IPD Snelting
Universität Karlsruhe (TH)

Teil X

Strukturierte Beweise mittels Isar:Quantoren

Allquantoren in zu zeigenden Aussagen

Wie gehe ich mit Parametern um?

Beispiel:

lemma assumes " $\neg(\exists x. \neg P x)$ " **shows** " $\forall x. P x$ "

proof

nach Anwendung von **proof** (implizit `allI`) subgoal: $\forall x. P x$

doch **show** " $\forall x. P x$ " funktioniert nicht!

Parameter müssen zu Beginn des Beweises "gefixt" werden:

$\forall a b c. P$ wird zu **fix** $a b c$ und **show** P

Unser Beispiel:

lemma assumes " $\neg(\exists x. \neg P x)$ " **shows** " $\forall x. P x$ "

proof

fix x

show " $P x$ " ...

qed

Allquantoren in zu zeigenden Aussagen

Wie gehe ich mit Parametern um?

Beispiel:

lemma **assumes** " $\neg(\exists x. \neg P x)$ " **shows** " $\forall x. P x$ "

proof

nach Anwendung von **proof** (implizit `allI`) subgoal: $\forall x. P x$

doch **show** " $\forall x. P x$ " funktioniert nicht!

Parameter müssen zu Beginn des Beweises "gefixt" werden:

$\forall a b c. P$ wird zu **fix** $a b c$ und **show** P

Unser Beispiel:

lemma **assumes** " $\neg(\exists x. \neg P x)$ " **shows** " $\forall x. P x$ "

proof

fix x

show " $P x$ " ...

qed

Allquantoren in zu zeigenden Aussagen

Wie gehe ich mit Parametern um?

Beispiel:

lemma **assumes** " $\neg(\exists x. \neg P x)$ " **shows** " $\forall x. P x$ "

proof

nach Anwendung von **proof** (implizit `allI`) subgoal: $\forall x. P x$

doch **show** " $\forall x. P x$ " funktioniert nicht!

Parameter müssen zu Beginn des Beweises "gefixt" werden:

$\forall a b c. P$ wird zu **fix** $a b c$ und **show** P

Unser Beispiel:

lemma **assumes** " $\neg(\exists x. \neg P x)$ " **shows** " $\forall x. P x$ "

proof

fix x

show " $P x$ " ...

qed

Repräsentanten

Um aus Existenzquantoren Repräsentanten zu erhalten, **obtain**

Syntax: **obtain** *Repräsentant* **where** *Aussage* *Beweis*

Beispiel:

lemma " $\exists x. P x \implies \neg(\forall x. \neg P x)$ "

proof

assume *ex*: " $\exists x. P x$ "

from *ex* **obtain** *z* **where** " $P z$ " **by** *blast*

...

- Repräsentantename kann beliebig gewählt sein (nicht vorhandene Variable!)
- Aussage nach **where** kann beliebigen Namen erhalten
- auch aus Allquantor **obtain** möglich

Repräsentanten

Um aus Existenzquantoren Repräsentanten zu erhalten, **obtain**

Syntax: **obtain** *Repräsentant* **where** *Aussage* *Beweis*

Beispiel:

lemma " $\exists x. P x \implies \neg(\forall x. \neg P x)$ "

proof

assume *ex*: " $\exists x. P x$ "

from *ex* **obtain** *z* **where** " $P z$ " **by** *blast*

...

- Repräsentantename kann beliebig gewählt sein (nicht vorhandene Variable!)
- Aussage nach **where** kann beliebigen Namen erhalten
- auch aus Allquantor **obtain** möglich

obtain-Beweise

Was genau passiert bei den **obtain**-Beweisen?

Isabelle baut aus Zeile **obtain** x **where** " $P\ x$ "

Beweisziel $(\forall x. P\ x \implies thesis) \implies thesis$ ($thesis$ beliebige Aussage)

Also (mittels geeigneter Annahmen) linke Seite der

" $P\ x \implies thesis$ "-Metaimplikation zeigen für beliebige x

Trotzdem Keine Panik!

- Wenn nach **where** exakt Aussage einer Existanzaussage, Beweis einfach mittel *blast*
- auch sonst meist Beweis mittels *blast* oder *auto*
- manchmal evtl. noch Fallunterscheidung nötig (z.B. Repräsentant ist Tupel)

Was genau passiert bei den **obtain**-Beweisen?

Isabelle baut aus Zeile **obtain** x **where** " $P\ x$ "

Beweisziel $(\forall x. P\ x \implies thesis) \implies thesis$ ($thesis$ beliebige Aussage)

Also (mittels geeigneter Annahmen) linke Seite der

" $P\ x \implies thesis$ "-Metaimplikation zeigen für beliebige x

Trotzdem Keine Panik!

- Wenn nach **where** exakt Aussage einer Existanzaussage, Beweis einfach mittel *blast*
- auch sonst meist Beweis mittels *blast* oder *auto*
- manchmal evtl. noch Fallunterscheidung nötig (z.B. Repräsentant ist Tupel)

Was genau passiert bei den **obtain**-Beweisen?

Isabelle baut aus Zeile **obtain** x **where** " $P\ x$ "

Beweisziel $(\forall x. P\ x \implies thesis) \implies thesis$ ($thesis$ beliebige Aussage)

Also (mittels geeigneter Annahmen) linke Seite der

" $P\ x \implies thesis$ "-Metaimplikation zeigen für beliebige x

Trotzdem **Keine Panik!**

- Wenn nach **where** exakt Aussage einer Existenzaussage, Beweis einfach mittel *blast*
- auch sonst meist Beweis mittels *blast* oder *auto*
- manchmal evtl. noch Fallunterscheidung nötig (z.B. Repräsentant ist Tupel)