



Universität Karlsruhe (TH)

Lehrstuhl für Programmierparadigmen

Theorembeweiser und ihre Anwendungen SS 2009 <http://pp.info.uni-karlsruhe.de/>

Übungsleiter: Daniel Wasserrab

wasserra@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt 6

Besprechung: 2.06.2009

Vollständige Binärbäume

In dieser Übung arbeiten wir mit Skeletten von Binärbäumen, in denen weder die Blätter ("tip") noch die inneren Knoten Daten enthalten:

```
datatype tree = Tp | Nd tree tree
```

Definieren Sie eine Funktion *tips*, welche die Blätter eines Baumes zählt und eine Funktion *height*, welche die Höhe eines Baumes berechnet (Hinweis: Wenn man die Höhe der Wurzel als 0 definiert, sind die folgenden Beweise einfacher).

Vollständige Binärbäume lassen sich durch folgende Funktion generieren:

```
primrec cbt :: "nat ⇒ tree"  
  where "cbt 0 = Tp"  
        | "cbt (Suc n) = Nd (cbt n) (cbt n)"
```

Im Folgenden werden wir uns auf diese vollständige Binärbäume konzentrieren.

Anstatt vollständige Binärbäume zu generieren, kann man auch *testen*, ob ein Binärbaum vollständig ist. Definieren Sie eine Funktion *iscbt* f (wobei f eine Funktion über *tree* ist), welche *trees* auf Vollständigkeit überprüft: Tp ist vollständig, und $Nd\ l\ r$ ist vollständig genau dann, wenn l und r vollständig sind und $f\ l = f\ r$ gilt.

Wir besitzen nun 3 Funktionen über *trees*, nämlich *tips*, *height* und *size*. Letztere ist automatisch für jeden Datentyp definiert: Alle Konstruktoren, in denen der Typ nicht rekursiv vorkommt, haben *size* 1, ansonsten werden die *sizes* der rekursiven Aufrufe zusammengezählt und um 1 erhöht (z.B. $size\ Tp = 1$, $size\ (Nd\ l\ r) = size\ l + size\ r + 1$). Wir besitzen nun also 3 Ausdrucksweisen der Vollständigkeit: vollständig bzgl. *tips*, vollständig bzgl. *height* und vollständig bzgl. *size*. Zeigen Sie,

- dass diese drei Begriffe dasselbe beschreiben (z.B. $iscbt\ tips\ t = iscbl\ size\ t$) und
- dass diese drei Begriffe genau diese *trees* beschreiben, welche von *cbt* generiert werden: das Ergebnis von *cbt* ist vollständig (im Sinne von *iscbt* bzgl. jeder beliebigen Funktion auf *trees*), und falls ein *tree* vollständig ist im Sinne von *iscbt*, ist er das Resultat von *cbt* (angewandt auf eine bestimmte Funktion – welche?).

Hinweise:

- Überlegen Sie sich und beweisen sie geeignete Beziehungen zwischen *tips*, *height* und *size*. Gelten die Aussagen allgemein oder nur für vollständige Bäume?
- Sie müssen nicht zeigen, dass jeder Begriff gleich jedem anderen ist. Es genügt zu zeigen, dass $A = B$ und $B = C$, daraus folgt $A = C$ trivialerweise. Jedoch besteht die Schwierigkeit darin, herauszufinden, welche dieser Gleichheiten am leichtesten zu beweisen sind.