

Exkurs: Elementare Verbandstheorie



Halbordnungen

Definition

Eine binäre Relation \leq auf einer Menge M heisst *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Es gilt also:

$$\forall x \in M : \quad x \leq x$$

$$\forall x, y, z \in M : \quad x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$$

$$\forall x, y \in M : \quad x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$$

Schreibweise:

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y$$

$$x \geq y \iff y \leq x$$



Beispiele

- Beispiel 1:

$$(M, \leq) \text{ mit } M = \{a, b, c, d, o, u\}$$

$$u < c, u < d, c < a, c < b, d < a, d < b, a < o, b < o$$

- Beispiel 2: Potenzmenge

$$(\mathcal{P}(M), \subseteq)$$

- Beispiel 3:

$$(\mathbb{N}, \leq)$$



Hasse-Diagramme

- Hasse-Diagramme sind graphische Darstellungen von Halbordnungen:
- eine Aufwärts-Kante $x \rightarrow y$ bedeutet $x < y$, wegen Transitivität impliziert ein Aufwärts-Pfad $x \rightarrow^* y$ ebenso $x \leq y$
- Halbordnungen sind stets (Aufwärts)-zyklenfrei wegen Antisymmetrie, deshalb kann man die Pfeile an den Kanten weglassen.

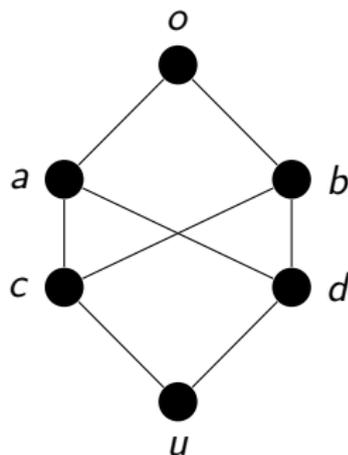


Abbildung: Beispiel 1



Schranken

- Eine Halbordnung heisst *total*, wenn alle Elemente vergleichbar sind:

$$\forall x, y \in M : x \leq y \vee y \leq x$$

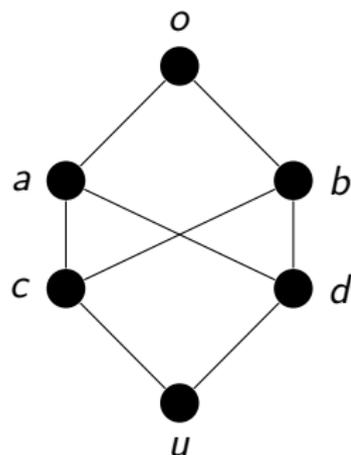
- z heisst *obere Schranke* zu x, y , wenn $x \leq z \wedge y \leq z$
- z heisst kleinste obere Schranke oder *Supremum*, wenn jede andere obere Schranke größer ist:

$$\forall o \in M : x \leq o \wedge y \leq o \implies z \leq o$$

- z heisst *untere Schranke*, wenn $z \leq x \wedge z \leq y$
- z heisst größte untere Schranke oder *Infimum*, wenn jede andere kleiner ist:

$$\forall o \in M : o \leq x \wedge o \leq y \implies o \leq z$$





In Beispiel 1:

- a und b sind obere Schranken zu c, d jedoch keine kleinste obere Schranke, da a, b unvergleichbar sind!
- Obere bzw. untere Schranken muss es nicht immer geben! Bsp: entferne o
- Wenn es eine größte untere Schranke bzw kleinste obere Schranke gibt so sind diese eindeutig (wieso?).
- Schreibweise: $x \sqcup y$ (Supremum), $x \sqcap y$ (Infimum).



Definition

Eine Halbordnung (M, \leq) heisst *Verband*, wenn für je zwei Elemente $x, y \in M$ stets $x \sqcup y$ und $x \sqcap y$ existieren. Ferner gibt es ein kleinstes Element $\perp = \bigsqcap M$ und größtes Element $\top = \bigsqcup M$.

Bemerkung: $\bigsqcup M = \bigsqcup_{x \in M} x$

In Verbänden gilt $x \leq y \iff x \sqcup y = y \iff x \sqcap y = x$.

Um die Gleichheit zweier Elemente $x = y$ zu zeigen, wird zumeist $x \leq y$ und $x \geq y$ gezeigt (es sei denn, man kommt mit rein algebraischen Umformungen aus)



Verbände

- Beispiel 1 ist kein Verband, da a, b , kein Infimum und c, d kein Supremum haben.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist Verband mit $\sqcap = \cap, \sqcup = \cup$
- weiteres Beispiel: Begriffsverbände (\rightsquigarrow Vorlesung FOO)
- Häufig in Beweisen angewandte Eigenschaft:
 $x \leq z \wedge y \leq z \implies x \sqcup y \leq z$. Analog für $x \sqcap y$.



Rechenregeln

- $x \sqcup x = x$
- $x \sqcup y = y \sqcup x$
- $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
- $x \sqcap x = x$
- $x \sqcap y = y \sqcap x$
- $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

Diese Regeln muss man beweisen, und zwar mit den o.g. Tricks (Übung!)

In distributiven Verbänden gilt

- $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$
- $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$



Definitionen

- Ist $(M; \leq, \sqcap, \sqcup, \top, \perp)$ ein Verband, so ist $(M; \geq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ der *duale* (auf den Kopf gestellte) Verband
- Ein Verband $(M; \leq, \sqcap, \sqcup, \top, \perp)$ heisst *vollständig*, wenn für beliebige $X \subseteq M$ sowohl $\sqcap X$ als auch $\sqcup X$ existieren.
- Endliche Verbände sind automatisch vollständig.
- Ein Verband hat endliche Höhe, wenn jeder aufsteigende Pfad $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots$ endlich ist.

Beispiel: Für eine beliebige Menge M betrachte

$$(M \cup \{\top, \perp\}, \leq) \text{ wobei } x \leq y \iff x = \perp \vee y = \top \vee x = y$$



Fixpunkte

Eine Funktion $f : M \rightarrow M$ heisst monoton, wenn

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Satz

In einem Verband endlicher Höhe M hat jede monotone Funktion f einen kleinsten *Fixpunkt*, und es existiert $k \in \mathbf{N}_0$ mit $f^k(\perp) = f^{k+1}(\perp)$ und

$$\text{fix}(f) = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_0} f^i(\perp) = f^k(\perp)$$



Beweis Fixpunktsatz

- Es ist $\perp \leq f(\perp)$, wegen Monotonie auch $f(\perp) \leq f(f(\perp))$.
Mit Induktion folgt:

$$\perp \leq f(\perp) \leq f^2(\perp) \leq \dots \leq f^i(\perp) \leq f^{i+1}(\perp) \leq \dots \leq \top$$

- Verband endlicher Höhe $\Rightarrow f^i(\perp)$ nach Schubfachprinzip nicht alle verschieden.



Beweis Fixpunktsatz

- Daher gibt es k, j mit $f^k(\perp) = f^{k+j}(\perp)$, sogar $f^k(\perp) = f^{k+1}(\perp) = f(f^k(\perp))$, da alle Elemente auf dem Pfad von k bis $k + j$ gleich.
 $\Rightarrow f^k(\perp)$ ist Fixpunkt von f .
- Angenommen $f(z) = z$, also z weiterer Fixpunkt. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \perp & & \leq z \\ f(\perp) & \leq f(z) & \leq z \\ f(f(\perp)) & \leq f(z) & \leq z \\ & \vdots & \\ f^i(\perp) & & \leq z \\ \implies f^k(\perp) & & \leq z \end{array}$$

$\Rightarrow f^k(\perp)$ ist kleinster Fixpunkt von f .



Galois-Verbindungen

wichtig für Theorie der Programmanalyse

(P, \leq) und (Q, \leq) seien Halbordnungen, $\alpha : P \rightarrow Q$, $\gamma : Q \rightarrow P$
Funktionen

(α, γ) heisst Galois-Verbindung, wenn

1. $x \leq y \implies \alpha(x) \geq \alpha(y)$
2. $u \leq v \implies \gamma(u) \geq \gamma(v)$
3. $x \leq \gamma(\alpha(x))$ und $u \leq \alpha(\gamma(u))$

α und γ sind also beide antimonoton. P und Q sind oft Potenzmengenverbände oder Verbände endlicher Höhe (s.o.)



Galois-Verbindungen

Lemma. (α, γ) sind Galois-Verbindung genau dann wenn

$$4. \quad x \leq \gamma(u) \iff u \leq \alpha(x)$$

Beweis. " \implies ": a. Sei $x \leq \gamma(u)$. Dann ist nach 1. und 3.

$$\alpha(x) \geq \alpha(\gamma(u)) \geq u. \quad \text{b. analog}$$

" \impliedby ": Es ist $\alpha(x) \leq \alpha(x)$ und nach 4. $x \leq \gamma(\alpha(x))$, also 3a. 3b analog. Sei nun $x \leq y$. Da $y \leq \gamma(\alpha(y))$, ist $x \leq \gamma(\alpha(y))$ und nach 4. $\alpha(y) \leq \alpha(x)$, also 1. 2. analog.

Lemma.

$$\alpha(x) = \alpha(\gamma(\alpha(x))) \quad \text{und} \quad \gamma(u) = \gamma(\alpha(\gamma(u)))$$

Beweis. " \leq ": Sei $v = \alpha(x)$. Dann ist nach 3b. $v \leq \alpha(\gamma(v))$.

" \geq ": Es ist $x \leq \gamma(\alpha(x))$ und mit 1. $\alpha(x) \geq \alpha(\gamma(\alpha(x)))$. Teil b analog.

Korollar. $\alpha \circ \gamma$ ist ein Hüllenoperator, also $x \leq \alpha(\gamma(x))$,
 $\alpha(\gamma(x)) = \alpha(\gamma(\alpha(\gamma(x))))$, und $x \leq y \implies \alpha(\gamma(x)) \leq \alpha(\gamma(y))$.
 $\gamma \circ \alpha$ ist auch ein Hüllenoperator.



Begriffsverbände

Mathematische Begriffsanalyse (Ganter & Wille):

- analysiert Relation zwischen “Objekten” und “Attributen”
 - visualisiert versteckte Struktur in dieser Relation
 - transformiert Relation in einen Begriffsverband
- ⇒ hierarchische Gruppierung von Objekten und Attributen
- ⇒ Abhängigkeiten, Interferenzen, Zerlegbarkeiten



Beispiel

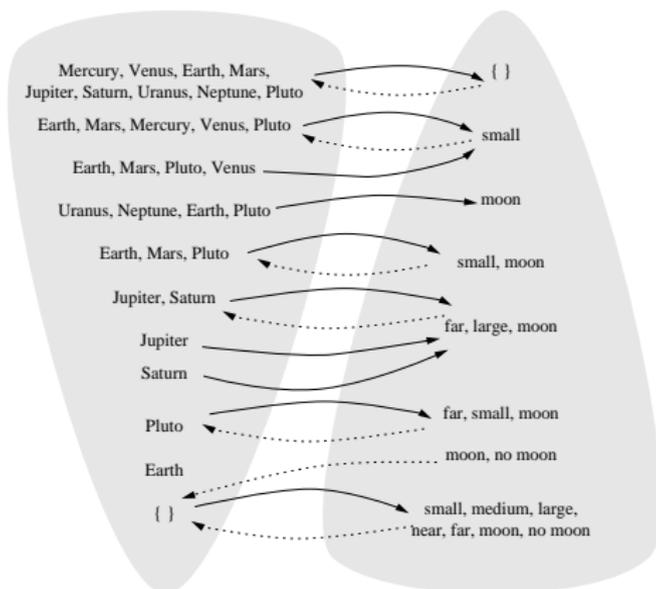
Relation zwischen Planeten und Eigenschaften:

	small	medium	large	near	far	moon	no moon
Mercury	×			×			×
Venus	×			×			×
Earth	×			×		×	
Mars	×			×		×	
Jupiter			×		×	×	
Saturn			×		×	×	
Uranus		×			×	×	
Neptune		×			×	×	
Pluto	×				×	×	



Beispiel/2

Gemeinsame Attribute / Gemeinsame Objekte:



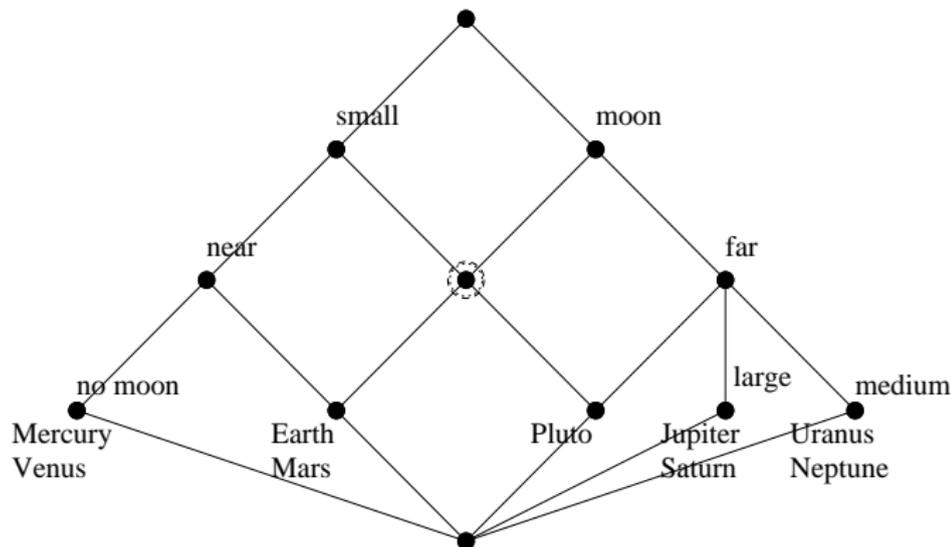
Dies ist eine Galoisverbindung!

$$\alpha : 2^{\text{Pla}} \rightarrow 2^{\text{Eig}}, \gamma : 2^{\text{Eig}} \rightarrow 2^{\text{Pla}}$$



Begriffsverband

maximale Rechtecke in der Tabelle werden zu Verbandselementen
(Zeilen-/Spaltenpermutationen irrelevant)



Eigenschaften des Verbandes

- Transformation der Originaltabelle: $\nu(o)$ ist das mit o markierte Verbandselement, $\mu(a)$ das mit a markierte

$$(o, a) \in T \iff \nu(o) \leq \mu(a)$$

- Suprema faktorisieren gemeinsame Eigenschaften heraus:
“Mars und Venus sind beide nah”
- Infima faktorisieren gemeinsame Objekte heraus:
“Pluto ist sowohl klein als auch weit”
- Aufwärtskanten sind Implikationen:
“Planeten ohne Mond sind auch nah und klein”

